

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

10 класс

1. (3 балла) Из всех целочисленных решений уравнения $xу = 7(x + y)$, выбрать ненулевое решение с наименьшим по абсолютной величине произведением $x \cdot y$. В ответе указать это произведение

2. (3 балла) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 19} = 57, \\ y^2 = x - 1. \end{cases}$$

3. (3 балла) Пункты А, В, С расположены последовательно, причем расстояние АВ равно 30 км, а расстояние ВС равно 40 км. Из пункта А выехал мотоциклист и поехал в пункт С. Одновременно с ним из пункта В выехал велосипедист и направился в пункт А. Известно, что мотоциклист и велосипедист прибыли в пункты А и С одновременно. Найдите, на каком расстоянии от пункта А они встретились.

4. (3 балла) Различные числа x и y таковы, что $x^2 + 2023x = y^2 + 2023y$. Найдите $x + y$.

5. (4 балла) В поточной лекционной аудитории 80 студентов. 40 из них не имеют задолженностей по математике, 30 — по физике, 50 — по информатике. 15 не имеют задолженностей ни по математике, ни по физике. 20 не имеют задолженностей ни по физике, ни по информатике. 25 не имеют задолженностей ни по математике, ни по информатике. Наконец, 5 не имеют задолженностей ни по одному из предметов. Сколько студентов имеют задолженности по всем трем предметам?

6. (4 балла) В небольшом частном предприятии имеется цех по производству колбас. В начале рабочего дня в цехе имеется 96 килограмм мясного фарша и 44 килограмм различных наполнителей (соя, стабилизаторы вкуса и т. д.). При изготовлении 1 кг колбасы второго сорта используется 600 гр. фарша, и 400 гр. наполнителя. При изготовлении 1 кг колбасы высшего сорта, 900 гр. и 100 гр. соответственно. Все сырье к концу дня было полностью израсходовано. По сколько килограмм колбасы каждого сорта было изготовлено?

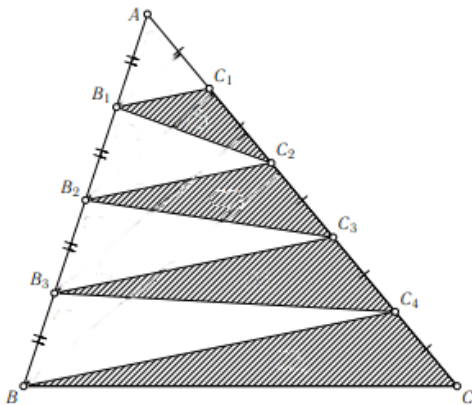
7. (5 баллов) Для всех действительных чисел a, b, c докажите справедливость неравенства

$$\sqrt{(a + b)^2 + (b + c)^2} + \sqrt{(a - b)^2 + (b - c)^2} \geq 2\sqrt{b^2 + c^2}.$$

8. (4 балла) Решите уравнение:

$$\cos^2(x \sin x) = 1 + \left| \log_5(x^2 - x + 1) \right|$$

9. (5 баллов) Сторону АВ треугольника ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0 = A, B_1, B_2, \dots, B_n = B$), а сторону AC этого треугольника разделили на $n + 1$ равных частей (точки деления $C_0 = A, C_1, C_2, \dots, C_{n+1} = C$). Закрасили треугольники $C_i B_i C_{i+1}$. Какая часть площади треугольника закрашена?



10. (4 балла) Развертка боковой поверхности правильной треугольной призмы есть прямоугольник со сторонами 18 см и 9 см. Определите площадь полной поверхности этой призмы. Найдите оба решения.

11 класс

1. (3 балла) Сравните числа

$$\left(\frac{1}{2023}\right)^{2023} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{2022}\right)^{2022}$$

2. (3 балла) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x^2-7x-7}} = 5 - 2\sqrt{x^2 - 7x - 7}, \\ \log_2 x = y. \end{cases}$$

3. (3 балла) Две эскадры, находившиеся на расстоянии 800 миль друг от друга, сближаются по одной прямой, причем каждая развивает скорость 25 узлов (миль/час). От местоположения одной из эскадр в начальный момент движения отправляется авизо (судно связи) и принимается двигаться со скоростью 30 узлов вперед и назад между эскадрами, пока те не соединятся. Какое расстояние успевает проплыть авизо до соединения эскадр?

4. (3 балла) У Пятачка имеется 4 синих и 6 зеленых воздушных шарика. Когда Винни-Пух пригласил его на «охоту за медом», Пятачек взял случайным образом один из своих

шаров с равной вероятностью выбора любого из имеющихся. После того, как Винни-Пух подлетел к жилищу пчел, они набросились на него. По просьбе Винни-Пуха Пятачек выстрелил в шарик из ружья. Вероятность для Пятачка попасть в синий шар с одного выстрела равна 0,8, а в зеленый — 0,9. Какова вероятность, что Пятачек попал в шарик с первого выстрела?

5. (4 балла) $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью 2. Известно, что S_{2023} — наименьшая среди всех S_n (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какое наименьшее целое значение может принимать первый член прогрессии?

6. (4 балла) Найдите такое натуральное число k , что $2023!$ делится на 2022^k , но не делится на 2022^{k+1} .

(Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$).

7. (5 баллов) Решите неравенство:

$$\frac{\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} + 5}{2(1 - \sin \frac{x}{2})} \leq \sqrt{4 - \sin^2 x}.$$

8. (5 баллов) Электрик ростом 1м80см удаляется по прямой горизонтальной дорожке от фонаря, подвешенного на высоте 12м. С какой скоростью удлиняется его тень, если он удаляется от фонаря со скоростью 50 м/мин.

9. (4 балла) В выпуклом четырехугольнике длина отрезка, соединяющего середины противоположных сторон равна 10. Найдите длину отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон, если диагонали четырехугольника перпендикулярны.

10. (4 балла) Квадрат со стороной 4 вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, параллельно диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдите объем тела вращения.