

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ (11 КЛАСС)
МГТУ, март, 2015г.

1. Чтобы выложить плиткой пол размером 8 футов на 9 футов, вы купили 72 плитки по цене, которую не можете вспомнить. Общая сумма покупки, проставленная в вашем чеке, меньше \$100, однако первая и последняя цифры неразборчивы. Запись выглядит так: \$*0,6*. Сколько стоила одна плитка?
2. Докажите, что при всяком целом n выражение $3^{4n+4} - 4^{3n+3}$ делится на 17.
3. Решите уравнение:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}.$$

4. Решите неравенство:

$$-2(5 - \sqrt{x^2 - 1})^5 - 7(5 - \sqrt{x^2 - 1})^3 + \sqrt{x^2 - 1} - 5 \geq 2x^5 + 7x^3 - x.$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение.

6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 1, отмечены точки P, Q и G – середины ребер AD , DC и DD_1 соответственно. Найдите объем многогранника $A_1 F M E$, где $F = A Q \cap P C$, $M = C G \cap D_1 Q$ и $E = P D_1 \cap A G$.