

1. Девятиклассник Миша говорит другу: «Позавчера мне было 15 лет, а в следующем году будет 18». Возможно ли это? И если да, то определите дату рождения Миши. (При определении возраста указывается целое число лет)
2. В комнате находятся люди, мухи и кошки, притом не менее чем по одному представителю каждого вида. Всего 12 особей. Общее количество ног – 60. Найти количество людей, кошек и мух в комнате. (Муха имеет 6 ног).
3. Из 30 осенних дней утром каждого дня в 12 случаях бывает ясная погода, в остальных - пасмурная. Если утром ясная погода, то вероятность дождя в течение дня – 0,3, если утром пасмурная погода, то вероятность дождя – 0,8. Рассеянный житель Иванов имеет два одинаковых зонта – исправный и сломанный. В пасмурное утро он обязательно берёт зонт, в ясное утро – берёт зонт с вероятностью 0,3. 1) Найти вероятность того, что в случайный день Иванов **не промокнет** под дождём. 2) Известно, что дождь в этот день был. Какова вероятность того, что утром было пасмурно?

4. Вычислите сумму

$$\cos 10^{\circ} + \cos 20^{\circ} + \cos 30^{\circ} + \dots + \cos 170^{\circ} + \cos 180^{\circ}$$

5. Решите уравнение:

$$\sqrt{\frac{x+4}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} = \frac{5}{6}$$

6. Решите уравнение:

$$\sqrt{y^2 - x + 4} + 4|x + 2y - 4| = x + 2y - 4.$$

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} |x - 3| - 3 = -2 \\ x + |y - 4| = 5 \end{cases}$$

8. Окружность  $S$  описана около квадрата  $ABCD$ . Докажите, что для любой точки  $X$ , находящейся на окружности, верно равенство  $XA^2 - XB^2 = XD^2 - XC^2$ .
9. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Назовите все отрезки, соединяющие вершины куба, перпендикулярные диагонали куба  $BD_1$ . Ответ обоснуйте.
10. Найдите отношение площадей полной поверхности параллелепипеда и многогранника, вершинами которого являются центры граней этого параллелепипеда.

- У Ватрушкина был один лист бумаги. Он разрезал его на 6 частей. Некоторые из частей он разрезал ещё на 6 частей и т.д. Когда он посчитал число всех частей, то их оказалось 2020. Докажите, что Ватрушкин ошибся.
- Из 30 летних дней утром каждого дня в 21 случае бывает ясная погода, в остальных - пасмурная. Если утром ясная погода, то вероятность дождя в течение дня – 0,1, если утром пасмурная погода, то вероятность дождя – 0,7. Девушка Саша, в ясное утро выходя из дома, всегда надевает босоножки, в пасмурное – надевает либо босоножки, либо туфли с равной вероятностью. Дождь бывает двух видов: слегка накрапывающий с вероятностью 0,6 или ливень – с вероятностью 0,4. Если дождь слегка накрапывает – туфли не промокают, если ливень – туфли промокнул. 1) Найти вероятность того, что в случайный день Саша **не промочит** ноги. 2) Известно, что дождь в этот день был. Какова вероятность того, что утром было ясно?

- Найдите все целочисленные пары точек, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} |x| + |y| < 4, \\ x^2 + y^2 \geq 8. \end{cases}$$

- Найдите значение выражения

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{lg} \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \operatorname{lg} \operatorname{tg} 88^\circ + \operatorname{lg} \operatorname{tg} 89^\circ$$

- Решите уравнение:  $\log_3(1+x) = \log_2 x$ .

- Решите неравенство:

$$\log_2^2(x^2 - 2y + 6) + 2|x + 2y - 5| \leq x + 2y - 5.$$

- Решите функциональное уравнение

$$f(x) - 2x = \frac{5}{x} - 4f\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 6, \\ x^4 + y^4 + z^2 = 12, \\ \log_x y^2 = z. \end{cases}$$

- В треугольнике ABC с прямым углом C на стороне AB произвольно взята точка K. На отрезках AK и BK как на диаметрах построены окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. Точки P и T – точки пересечения окружностей со сторонами AC и BC соответственно, отличные от вершин треугольника. Докажите, что площадь четырёхугольника  $PO_1O_2T$  не зависит от выбора точки K.
- Докажите, что многогранник, восемь вершин которого - центры треугольников со сторонами, являющимися отрезками, соединяющими середины рёбер, исходящих из одной вершины куба, является правильным. Найдите длину его ребра, если длина ребра исходного куба равна 1.