



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

З.С. Акманова
Н.А. Квасова

МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПУТЬ К УСПЕХУ»:
НАПРАВЛЕНИЕ «МАТЕМАТИКА»,
ПОДТЕМА «ТЕОРИЯ ГРАФОВ-ШКОЛЬНИКУ»

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия*

Магнитогорск
2021

УДК 371.27:51(075.8)
ББК 22.1я73

Рецензенты:

главный специалист отдела организации общего образования
Управления образования администрации г. Магнитогорска
Н.А. Зубкова

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
Е.А. Пузанкова

Акманова З.С., Квасова Н.А.

Многопрофильная олимпиада школьников «Путь к успеху»: направление «Математика», подтема «Теория графов-школьнику» [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Зоя Сергеевна Акманова, Нина Александровна Квасова ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (2,03 Мб). – Магнитогорск: ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2021. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9967-2085-9

В учебном пособии представлены учебно-методические материалы для подготовки выпускников школ к ЕГЭ по предмету математика, разделу-теория графов.

Пособие предназначено для учителей школ и абитуриентов.

УДК 371.27:51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9967-2085-9

© Акманова З.С., Квасова Н.А., 2021

© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова», 2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1. НЕМНОГО ОБ ИСТОРИИ	5
1.1. Задача о Кёнигсбергских мостах	5
1.2. Свойства графа	8
2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ	9
2.1. Понятие графа	9
2.2. Некоторые виды графов	10
3. ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ	12
3.1. Задачи	12
3.2. Свойство изоморфизма графов	13
3.3. Окрестности и степени	14
3.4. Связность графа	15
3.5. Графы Эйлера	16
3.6. Вычерчивание фигур одним росчерком	17
3.7. Решение логических задач с помощью графов	18
4. КРАСИВЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ, НАЙДЕННЫЕ НА ПРОСТОРАХ ИНТЕРНЕТА	20
5. ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	26
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	29

ВВЕДЕНИЕ

Теория графов и ее приложения – это раздел прикладной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами.

В качестве прикладной дисциплины, теория графов позволяет исследовать и решать многие математические, логистические, экономические, технические, социальные и др. задачи, возникающие при управлении организационными системами.

Схемы различных коммуникаций, электрических цепей, химических соединений, блок-схемы компьютерных программ, схемы связей между людьми и группами людей фактически являются графами. С помощью графов легко и просто формулируется большинство задач, в которых фигурируют дискретные объекты и процессы.

Появление ЭВМ, развитие математической логики, машинной математики, теории информации, исследования операций, биологии, математической лингвистики и других дисциплин, привело к росту числа задач, где, в отличие от классического анализа непрерывных величин, на первый план выходят рассуждения и построения дискретно-комбинаторного характера. Как результат- теория графов стала одной из существенных частей математического аппарата многих научных дисциплин и вошла в учебные программы вузов.

Кроме того: простота и красота многих задач, решаемых на графах, позволяет сделать их доступными для школьников, иногда и с довольно раннего возраста.

Нашей целью является попытка просто и доступно, но без лишнего примитивизма поговорить со школьниками о графах.

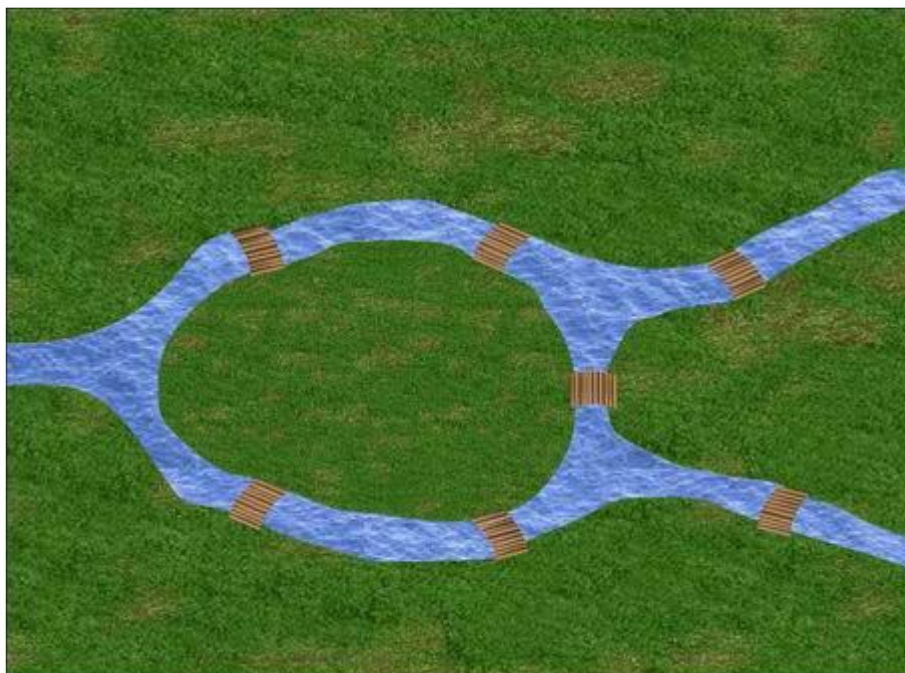
1. НЕМНОГО ОБ ИСТОРИИ

1.1. Задача о Кёнигсбергских мостах

Есть такой город Калининград, раньше он назывался Кенигсберг.

Бывший Кёнигсберг расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова когда-то были перекинuty мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.

Рассказывают, что однажды житель города спросил у своего знакомого, сможет ли он пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать только один раз и вернуться к тому месту, откуда началась прогулка?



Многие горожане заинтересовались этой задачей, однако придумать решение никто не смог. Этот вопрос привлек внимание ученых из многих стран.

Разрешить проблему удалось известному математику Леонарду Эйлеру. До него никому не удавалось не только найти решение, но и доказать, что это невозможно. Леонард Эйлер не только решил эту конкретную задачу, но и придумал общий метод решения этих задач.



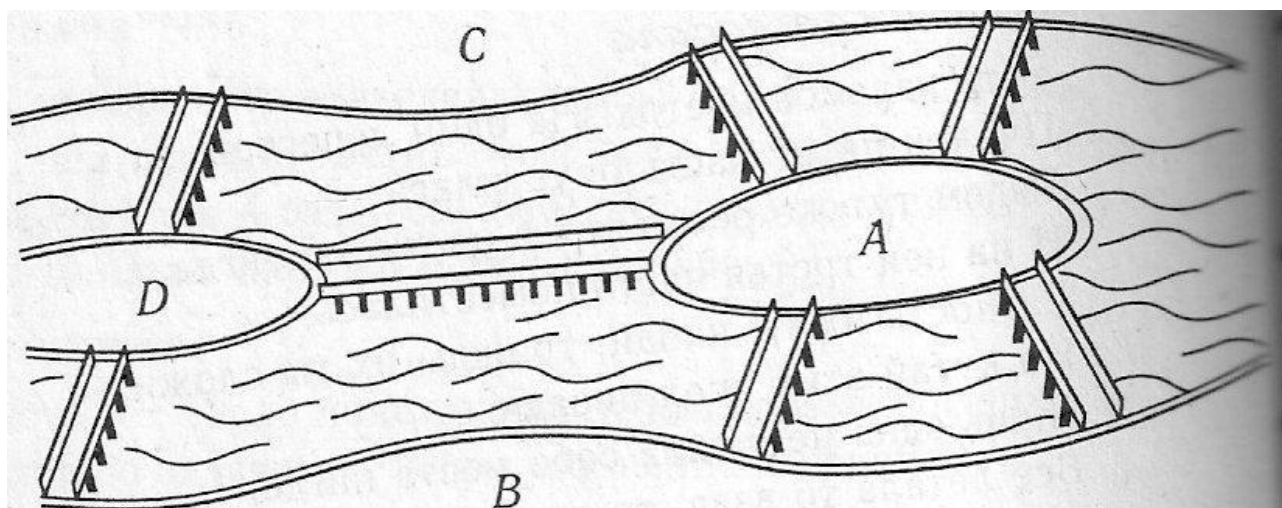
Леонард Эйлер(1707-1783) – математик, механик, физик и астроном

Леонард Эйлер, уроженец города Базеля. Родился 15 апреля 1707 года. Научные заслуги Эйлера огромны. Ученый необычайной широты интересов. Автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки.

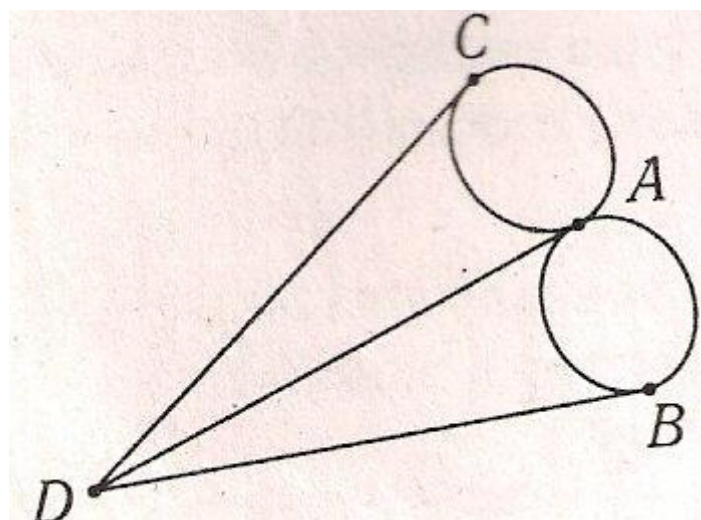
Леонард Эйлер по происхождению швейцарец. В 1726г. был приглашен работать в Петербург, в 1727г. переехал жить в Россию. Являлся академиком, а затем почетным членом Петербургской академии наук.

Он оказал влияние на развитие почти всех разделов математики и механики, как в области фундаментальных исследований, так и в их приложениях.

Прогуляться по городским мостам предложили и Эйлеру. После безуспешной попытки совершить нужный обход - он начертил упрощенную схему мостов.



Леонард Эйлер поступил следующим образом: он «сжал» сушу в точки, а мосты «вытянул» в линии. В результате получилась фигура, изображенная на рисунке.



Такую фигуру, состоящую из точек и линий, связывающих эти точки, потом назовут графом. Точки A, B, C, D называют вершинами графа, а линии, которые соединяют вершины – ребрами графа. На рисунке из вершин B, C, D выходят по 3 ребра, а из вершины A – 5 ребер. Вершины, из которых выходит нечетное число ребер, называют нечетными вершинами, а вершины, из которых выходит четное количество ребер, – четными.

Получился граф, вершины которого – части города, разделенные рекой, а ребра – мосты.

Если попробовать провести линии по всем ребрам - "мостам", не отрывая карандаша от бумаги, то ни у кого ничего не получится.

У Эйлера тоже не получилось. А почему? Оказывается все дело в числе ребер, сходящихся в вершине. Можно посчитать, сколько ребер сходится в каждой вершине данного графа, и написать рядом с каждой вершиной число, отражающее количество ребер, в ней сходящихся.

Назовем вершину четной или нечетной в зависимости от того, какое число, четное или нечетное, стоит рядом.

Итак, в вершине А сходится 5 ребер, в вершине В-3, в вершине С-3, в вершине Д-3. Какими являются все эти вершины? (Нечетными.)

Леонард Эйлер сформулировал правило:

Обход возможен:

- *ЕСЛИ все вершины – четные, и его можно начать с любого участка.*
- *ЕСЛИ 2 вершины – нечетные, но его нужно начать с одной из нечетных вершин.*

Обход невозможен если нечетных вершин больше 2.

1.2. Свойства графа

Решая задачу про кенигсбергские мосты, Эйлер установил, в частности, свойства графа:

1. Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком (т.е. не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды по одной и той же линии) начертить граф. При этом движение можно начать с любой вершины и закончить в той же вершине.

2. Граф с двумя нечетными вершинами тоже можно начертить одним росчерком. Движение нужно начинать от любой нечетной вершины, а заканчивать на другой нечетной вершине.

3. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

4. Число нечетных вершин графа всегда четное.

5. Если в графе имеются нечетные вершины, то наименьшее число росчерков, которыми можно нарисовать граф будет равно половине числа нечетных вершин этого графа.

Например, если фигура имеет четыре нечетные вершины, то её можно начертить, самое меньшее, двумя росчерками.

В задаче о семи кенигсбергских мостах все четыре вершины соответствующего графа нечетные, то есть во время прогулки по городу нельзя пройти по всем семи мостам, проходя по каждому только один раз.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

2.1. Понятие графа

Итак. Что же такое граф?

Представим на плоскости конечное множество точек V и некоторое множество X - линий, соединяющих эти точки. Множество точек будем называть множеством вершин, а соединяющие их линии -множеством ребер.

Совокупность двух множеств (вершин и рёбер) называют графом.

Объекты такого рода могут быть наглядно представлены в виде рисунков, состоящих из точек, кружочков или иных фигур, соединенных линиями. При этом точки соответствуют элементам множества, а линии отражают связи (отношения) между ними.

Подобные рисунки обычно и называют графами, хотя соответствующее понятие шире, а рисунок — лишь одна из форм представления графа.

Схемы различных коммуникаций, электрических цепей, химических соединений, блок-схемы компьютерных программ, схемы связей между людьми и группами людей фактически являются графами.

С помощью графов легко и просто формулируется большинство задач, в которых фигурируют дискретные объекты и процессы.

Введение термина "граф" приписывается известному венгерскому математику Д. Кёнигу (1884-1944) автору одной из первых книг по теории графов (1936 г.). Однако имеются и более ранние работы (статьи, как самого Кёнига, так и других авторов), где используется это название.

Граф состоит из двух множеств – множества V , элементы которого называются вершинами, и множества E , состоящего из пар вершин, эти пары называются ребрами графа. Это записывают так: $G = (V, E)$, где G – имя графа.

Один момент в этом определении требует уточнения: считаем ли мы ребра (a,b) и (b, a) различными. Если да (и это распространяется на все ребра), то граф называется ориентированным (сокращенно орграф), в противном случае – неориентированным.

Говорят, что ребро (a,b) соединяет вершины a и b . Если такое ребро в графе есть, то говорят, что вершины a и b в нем смежны. Заметим, что в графе может быть не более одного ребра, соединяющего данную пару вершин.

Ребро типа (a,a) , т.е. соединяющее вершину с ней же самой, называют петлей. Говорят, что ребро $e = (a, b)$ инцидентно каждой из вершин a и b , а каждая из этих вершин инцидентна ребру e .

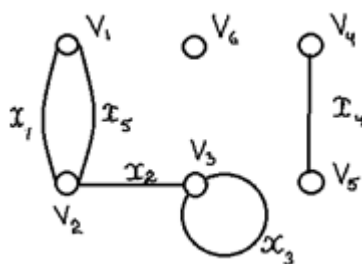
В дальнейшем, если не оговаривается иное, под графом понимается неориентированный граф без петель, такие графы называют обыкновенными. Для обозначения числа вершин и числа ребер графа будем обычно использовать буквы n и m . Мультиграф – обобщение понятия графа. В мультиграфе могут быть кратные ребра, то есть несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин.

Иначе говоря, в мультиграфе E является мультимножеством, то есть одна пара может входить в него несколько раз.

2.2. Некоторые виды графов

1. **Граф-вершина.** Элемент (точка) графа, обозначающий объект любой природы, входящий в множество объектов, описываемое графом. То же: узел, точка. (V6-изолированная точка)

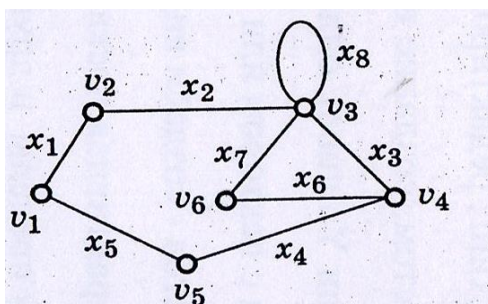
2. **Граф-ребро.** Линия, соединяющая пару смежных вершин графа. (V5-V4)



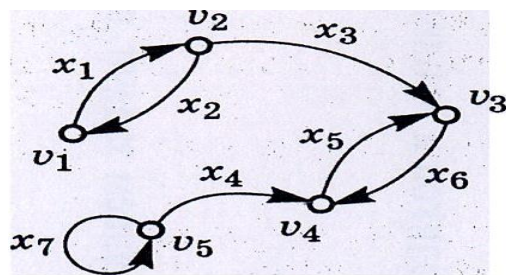
Граф G_1

3. **Пустой граф.** Пустым называется граф без ребер

4. **Неориентированный граф.** Если ребра не имеют ориентации, граф называется неориентированным.



5. **Оrientированный граф.** Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется ориентированным графом.



2.3. Способы задания графов

Существует много способов представить граф, назовем только самые распространенные.

1. **Перечисление элементов.** Исходя из определения, для того, чтобы задать граф, достаточно перечислить его вершины и ребра (т.е. пары вершин).

2. **Изображение.** Если граф невелик, его можно нарисовать. В неориентированном графе, ребра изображаются линиями, в ориентированном – стрелками.

3. **Матрица смежности.** Пусть G – граф с n вершинами, пронумерованными числами от 1 до n . Матрица смежности – это таблица с n строками и n столбцами, в которой элемент, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j , равен 1, если вершины с номерами i и j смежны, и 0, если они не смежны.

4. **Матрица инцидентности.** Пусть G – граф, вершины которого пронумерованы числами от 1 до n , а ребра – числами от 1 до m . В матрице инцидентности строки соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. На пересечении строки с номером i и столбца с номером j стоит 1, если вершина с номерами i инцидентна ребру с номером j смежны, и 0 в противном случае.

5. **Списки смежности.** Этот способ часто используется для компьютерного представления графов. Состоит он в том, что для каждой вершины задается список всех смежных с ней вершин. В структурах данных, применяемых в программировании, списки смежности могут быть реализованы как массив линейных списков. При решении задач будем эти списки оформлять так: пишется номер или имя вершины и после двоеточия перечисляются все смежные с ней вершины

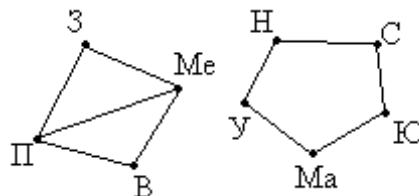
3. ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ

3.1. Задачи

Рассмотрим задачи, которые часто фигурируют в различных олимпиадах и математических конкурсах.

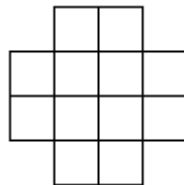
Задача 1. Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Венера; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, а маршруты ракет – линиями.



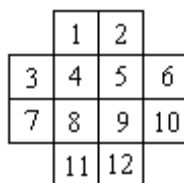
Получился граф. И сразу стало видно, что долететь с Земли до Марса нельзя, так как вершины З и Ма не связаны и пути не имеют.

Задача 2. Доска имеет форму двойного креста, который получается, если из квадрата 4x4 убрать угловые клетки.

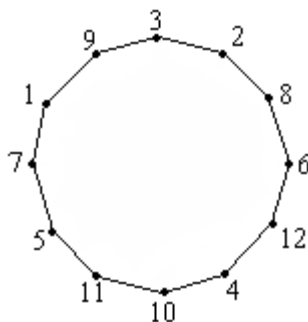


Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходную клетку, побывав на всех клетках ровно по одному разу?

Решение: Занумеруем последовательно клетки доски и будем рассматривать номера клеток как вершины графа, а возможные пути как его рёбра:



А теперь покажем, что такой обход таблицы, как указано в условии, возможен:



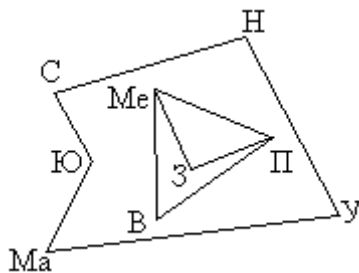
Решением является граф.

Замечание: Не каждая картинка подобного вида является графом.

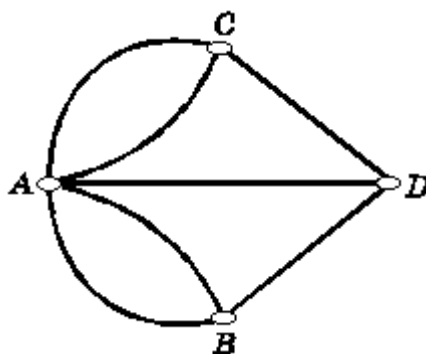
Например, если нарисовать в тетради пятиугольник, то такой рисунок графом не будет. Будем говорить, что рисунок такого вида, как в предыдущих задачах -граф, если есть какая-то конкретная задача, для которой такой рисунок построен.

3.2. Свойство изоморфизма графов

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины можно располагать по своему усмотрению (часто связано с удобством для пользования) и произвольно выбирать форму соединяющих линий. Говорят, что в этом проявляется свойство изоморфизма графов. Например, граф для задачи 1 можно нарисовать по-другому:



А так -изобразить задачу о Кёнигсбергских мостах:



Такие одинаковые, но по-разному нарисованные графы, называются изоморфными.

3.3. Окрестности и степени

Множество вершин, смежных с данной вершиной x в некотором графе, называется окрестностью этой вершины и обозначается через $N(x)$. Число вершин в $N(x)$ называется степенью вершины x и обозначается через $\deg(x)$.

Если сложить степени всех вершин графа, то каждое ребро внесет в эту сумму вклад, равный 2. Следовательно, сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер графа:

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2m$$

Это утверждение называют теоремой о рукопожатиях.

Иначе: Степенью вершины графа называется количество выходящих из нее ребер. В связи с этим, вершина, имеющая четную степень, называется четной вершиной, соответственно, вершина, имеющая нечетную степень, называется нечетной вершиной.

Задача 3. В некотором учреждении 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен, ровно с пятью другими? А с шестью?

Решение: Допустим, что такое соединение телефонов возможно. Тогда представим себе граф, в котором вершины обозначают телефоны, а ребра – провода, их соединяющие. Подсчитаем, сколько всего получится проводов. К каждому телефону подключено ровно 5 проводов, т.е. степень каждой вершины нашего графа – 5. Чтобы найти число проводов, надо просуммировать степени всех вершин графа и полученный результат разделить на 2 (т.к. каждый провод имеет два конца, то при суммировании степеней каждый провод будет взят 2 раза). Но тогда количество проводов получится равным $15 \cdot 5 / 2 = 37.5$. Но это число не целое. Значит наше предположение о том, что можно соединить каждый телефон ровно с пятью другими, оказалось неверным. А вот с шестью телефонами - возможно. Число проводов будет равно $15 \cdot 6 / 2 = 45$

С понятием степени вершины связана одна из основных теорем теории графов – теорема о четности числа нечетных вершин. Докажем ее.

Теорема: Любой граф содержит четное число нечетных вершин.

Доказательство: Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин. Так как количество ребер должно быть целым числом, то сумма степеней вершин должна быть четной. А это возможно только в том случае, если граф содержит четное число нечетных вершин.

Задача 4. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Доказательство непосредственно следует из теоремы о четности числа нечетных вершин графа.

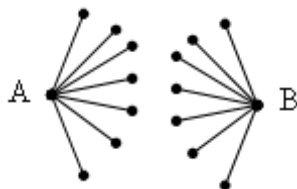
3.4. Связность графа

Есть еще одно важное понятие, относящееся к графам – понятие связности.

Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить путем, т.е. непрерывной последовательностью ребер. Существует целый ряд задач, решение которых основано на понятии связности графа.

Задача 5. В области 15 городов, каждый из городов соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться в любой другой.

Доказательство: Рассмотрим два произвольных А и В города и допустим, что между ними нет пути. Каждый из них соединен дорогами не менее, чем с семью другими, причем нет такого города, который был бы соединен с обоими рассматриваемыми городами (в противном случае существовал бы путь из А в В). Нарисуем часть графа, соответствующую этим городам:



Теперь явно видно, что мы получили не менее различных 16 городов, что противоречит условию задачи. Значит утверждение доказано от противного.

Если принять во внимание предыдущее определение, то утверждение задачи можно переформулировать и по-другому: “Доказать, что граф дорог страны Семерка связан.”

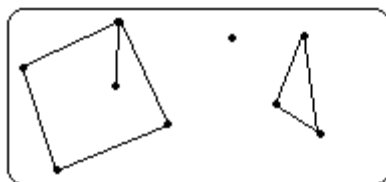
Итак: Граф называется связным, если для любых двух его вершин имеется путь, соединяющий эти вершины.

Если граф несвязен, то он состоит из нескольких связных подграфов, между которыми нет ребер, они называются компонентами связности.

Шарнир (точка сочленения) в графе – вершина, при удалении которой увеличивается число компонент связности.

Перешеек – ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности.

Теперь вы знаете, как выглядит связный граф. Несвязный граф имеет вид нескольких “кусков”, каждый из которых – либо отдельная вершина без ребер, либо связный граф. Пример несвязного графа вы видите на рисунке:



Каждый отдельный элемент называется компонентой связности графа. Каждая компонента связности представляет собой связный граф и для нее выполняются все утверждения, которые мы доказали для связных графов.

Рассмотрим пример задачи, в которой используется компонента связности:

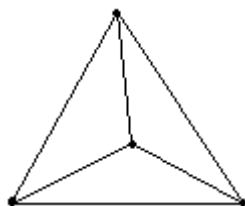
Задача 6. В Тридевятом царстве только один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов, – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в город Дальний.

Доказательство: Если нарисовать граф ковролиний Царства, то он может быть несвязным, как в задаче про планеты. Рассмотрим компоненту связности, которая включает в себя столицу Царства. Из столицы выходит 21 ковролиния, а из любых других городов, кроме города Дальний – по 20, поэтому, чтобы выполнялся закон о четном числе нечетных вершин необходимо, чтобы и город Дальний входил в эту же самую компоненту связности. А так как компонента связности – связный граф, то из столицы существует путь по ковролиниям до города Дальний, что и требовалось доказать.

3.5. Графы Эйлера

Пусть требуется нарисовать какую-либо фигуру, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждую линию только один раз. Такая задача не всегда разрешима, т.е. существуют фигуры, которые указанным способом нарисовать невозможно. Впервые вопрос разрешимости таких задач исследовал в 1736 году великий немецкий математик Леонард Эйлер, решая задачу о Кенигсбергских мостах. Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются Эйлеровыми графами.

Задача 7. Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?



Решение. Если мы будем рисовать граф так, как сказано в условии, то в каждую вершину, кроме начальной и конечной, мы войдем столько же раз,

сколько выйдем из нее. То есть все вершины графа, кроме двух должны быть четными. В нашем же графе имеется три нечетные вершины, поэтому его нельзя нарисовать указанным в условии способом.

Решая эту задачу, мы доказали теорему об Эйлеровых графах:

Теорема: *Эйлеров граф должен иметь не более двух нечетных вершин.*

И в заключение – задача о Кенигсбергских мостах, рассмотренная нами в главе об истории была доказана с помощью этой теоремы.

3.6. Вычерчивание фигур одним росчерком

Теперь нам нужно будет разобраться и показать, какую из любых данных фигур можно вычертить одним росчерком, без повторения линий, а какую нет. Каждую из задач подобного рода можно свести к разобранной уже нами Эйлеровой задаче о мостах.

Например, на рисунке изображена птица.

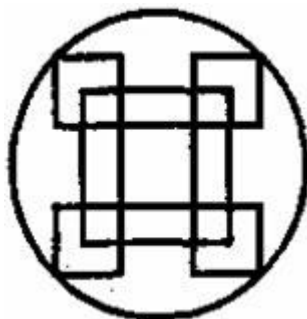


Взяв за вершины графа точки пересечения линии, получим 7 вершин, только две из которых имеют нечетную степень.

Поэтому в этом графе существует эйлеров путь, а значит, птицу можно нарисовать одним росчерком.

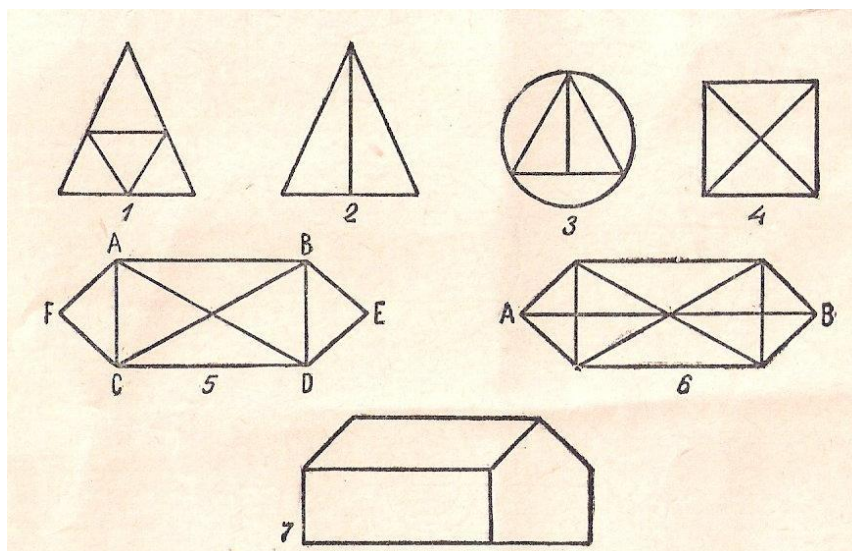
Нечетные вершины: две.

5. Можно ли фигуру, изображенную на рисунке, нарисовать одним росчерком? (решить с помощью графа)



Все вершины четные.

А что вы скажете об этих фигура?



Если нечетных вершин в фигуре нет, то она всегда поддается вырисовыванию одним росчерком пера, безразлично, с какого места ни начинать черчение. Таковы фигуры 1 и 5.

Если в фигуре имеется только одна пара нечетных вершин, то такую фигуру можно нарисовать одним росчерком, начав черчение в одной из нечетных вершин (безразлично в какой). Легко сообразить, что вычерчивание должно оканчиваться во второй нечетной вершине. Таковы фигуры 2, 3, 6. В фигуре 6, например, вычерчивание надо начинать либо из точки А, либо из точки В.

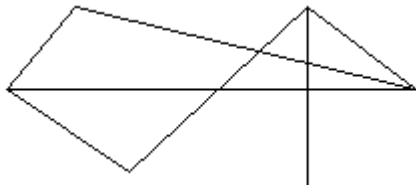
Если фигура имеет более одной пары нечетных точек, то она вовсе не может быть нарисована одним росчерком. Таковы фигуры 4 и 7, содержащие по две пары нечетных точек. Сказанного достаточно, чтобы безошибочно распознавать, какие фигуры нельзя нарисовать одним росчерком и какие можно, а также, с какой точки надо начинать вычерчивание.

3.7. Решение логических задач с помощью графов

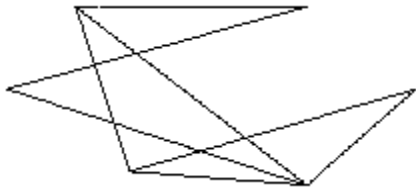
Задача 8. В первенстве класса по настольному теннису 6 участников: Андрей, Борис, Виктор, Галина, Дмитрий и Елена. Первенство проводят по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из остальных один раз. К настоящему моменту некоторые игры уже проведены: Андрей сыграл с Борисом, Галиной, Еленой; Борис – с Андреем, Галиной; Виктор – с Галиной, Дмитрием, Еленой; Галина – с Андреем, Виктором и Борисом. Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько ещё осталось?

РЕШЕНИЕ:

Построим граф как показано на рисунке.



Сыграно 7 игр.

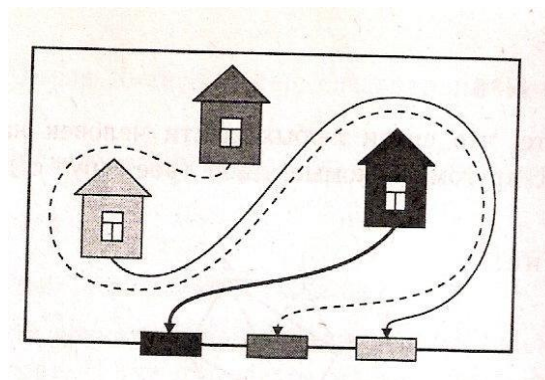


На этом рисунке граф имеет 8 ребер, следовательно, осталось провести 8 игр.

Задача 9. Во дворе, который окружен высоким забором, находятся три домика: красный, желтый и синий. В заборе есть три калитки: красная, желтая и синяя. От красного домика проведите дорожку к красной калитке, от желтого домика — к желтой калитке, от синего — к синей так, чтобы эти дорожки не пересекались.

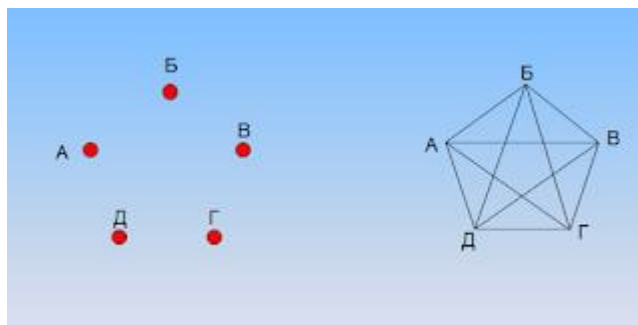
РЕШЕНИЕ:

Решение задачи приведено на рисунке.



4. КРАСИВЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ, НАЙДЕННЫЕ НА ПРОСТОРАХ ИНТЕРНЕТА

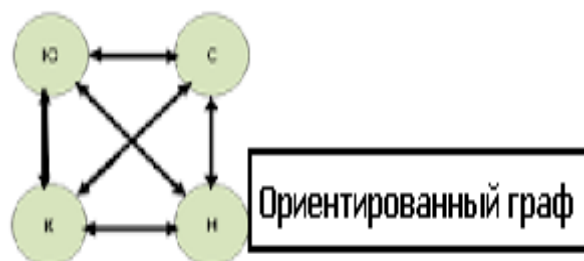
Задача № 1 Аркадий, Борис, Владимир, Григорий и Дмитрий при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?



Неориентированный граф

Задача № 2

4 человека из нашего класса захотели поздравить друг друга с новым годом. Сделать это решили с помощью SMS-ок. Сколько всего SMS-ок было отправлено? (12)



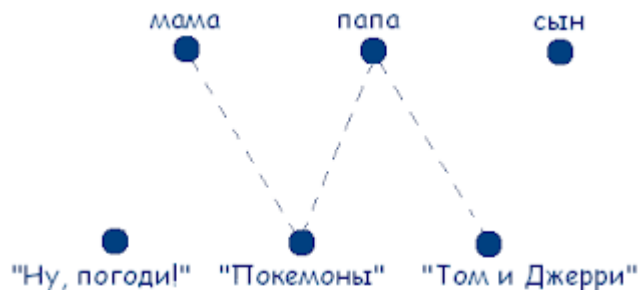
Задача № 3 Любители мультфильмов:

Рассмотрим множество людей: мама, папа, сын и множество мультфильмов «Ну, погоди!», «Покемоны», «Том и Джерри». Обозначим элементы этих двух множеств точками



Если точке из одного множества соответствует точка другого множества, будем соединять эти точки сплошной линией, если не соответствует – то штриховой.

Заметим, что по условию задачи у человека только один любимый мультфильм. Учитывая данные задачи, получаем следующую схему:



Из условия задачи следует, что нужно найти единственно возможное соответствие между элементами двух множеств.

Правило: если какая-то точка оказывается соединенной с двумя точками другого множества штриховыми линиями, то с третьей точкой она должна быть соединена сплошной.

Поэтому граф на рисунке будет выглядеть следующим образом:



Теперь мы установили, что папа любит мультфильм «Ну, погоди!», сын – «Покемоны». В обоих множествах остается только по одной точке, следовательно мама любит мультфильм «Том и Джерри». Задача решена.

Таким же способом можно находить соответствие между тремя множествами. Тогда при решении мы можем получить треугольники трех видов:

- а) все стороны являются сплошными отрезками (решение задачи);
- б) одна сторона – сплошной отрезок, а две другие – штриховые;
- в) все стороны – штриховые отрезки.

Таким образом, нельзя получить треугольник, у которого бы две стороны были сплошными отрезками, а третья – штриховой отрезок.

Задача № 4

Клоуны Бам, Бим, Бом вышли на арену в красной, синей и зеленой рубашках. Их туфли тоже были этих трех цветов.

Туфли и рубашка Бима были одного цвета.

На Боме не было ничего красного.

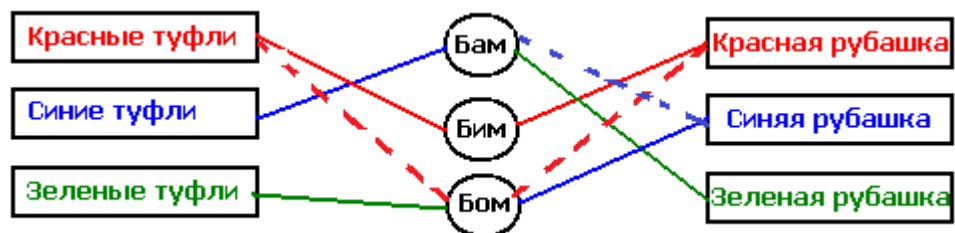
Туфли Бама были синие, а рубашка нет.

Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

Решение:

Туфли Бама синие, а Бома — зелёные. Рубашка Бома не может быть ни красной, ни зелёной (ибо зелёная рубашка у Бама). Поскольку рубашка Бама зелёная, то рубашка Бома не может быть ни красной, ни зелёной. Значит, она синяя. Биму остаются красные туфли. Поэтому и рубашка у него красная.

Изобразим с помощью графа

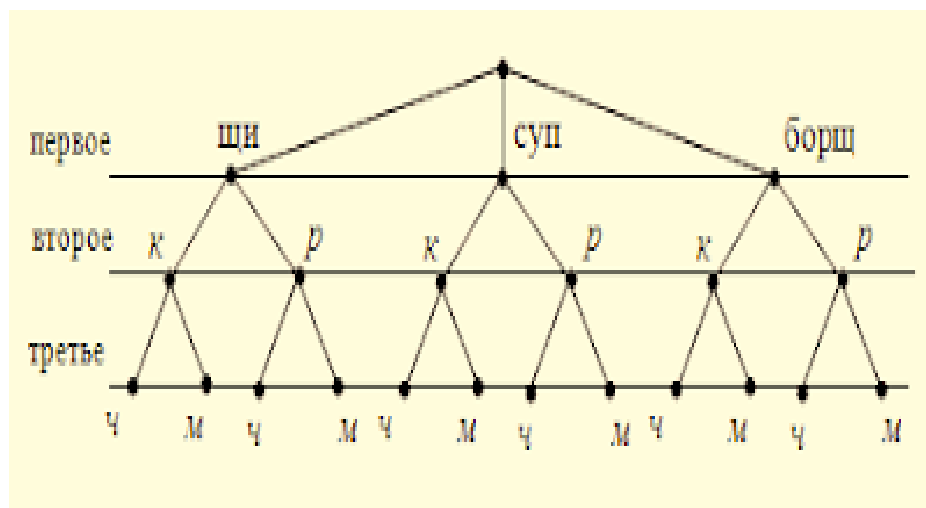


Ответ: Бом – синяя рубашка и зеленые туфли

Бам – зеленая рубашка и синие туфли.

Задача № 5

В школьной столовой на первое можно заказать щи, суп и борщ, на второе – котлету и рыбу, а на третье – чай и морс. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?



Ответ: 12 обедов.

Задачи к теме “Графы”

1. На квадратной доске 3x3 расставлены 4 коня так, как показано на рис.1. Можно ли сделав несколько ходов конями, переставить их в положение, показанное на рис.2?

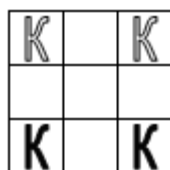


Рис. 1

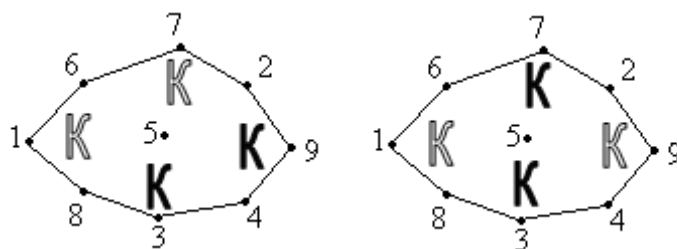


Рис. 2

Решение. Занумеруем клетки доски, как показано на рисунке:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Каждой клетке поставим в соответствие точку на плоскости и, если из одной клетки можно попасть в другую ходом шахматного коня, то соответствующие точки соединим линией. Исходная и требуемая расстановки коней показаны на рисунках:



При любой последовательности ходов конями порядок их следования, очевидно, измениться не может. Поэтому переставить коней требуемым образом невозможно.

2. В стране Математика есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9?

Решение. Поставив в соответствие каждому городу точку и соединив точки линией, если сумма цифр делится на 3, получим граф, в котором цифры 3, 5, 9 связаны между собой, но не связаны с остальными. Значит долететь из города 1 в город 9 нельзя.

3. В государстве 100 городов к из каждого города выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве.

Решение. Подсчитаем общее количество выходящих городов дорог – $100 \cdot 4 = 400$. Однако при таком подсчете каждая дорога посчитана 2 раза – она выходит из одного города и входит в другой. Значит всего дорог в два раза меньше, т.е. 200.

4. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 человек имеют по 3 друга, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

Ответ. Нет (теорема о четности числа нечетных вершин).

5. У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей?

Ответ. Нет, не может.

6. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Решение. Подсчитаем число городов. Число дорог равно числу городов x , умноженному на 3 (число выходящих из каждого города дорог) и разделенному на 2 (см. задачу 3). Тогда $100 = 3x/2 \Rightarrow 3x=200$, чего не может быть при натуральном x .

Значит 100 дорог в таком государстве быть не может.

Связность.

8. В стране из каждого города выходит 100 дорог и из каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться до любого другого.

Доказательство. Рассмотрим компоненту связности, в которую входит один из городов, дорогу между которыми закрыли. По теореме о четности числа нечетных вершин в нее входит и второй город. А значит по-прежнему можно найти маршрут и добраться из одного из этих городов в другой.

Графы Эйлера.

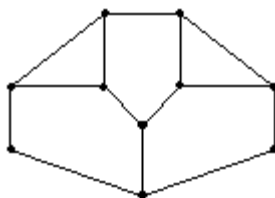
9. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно 1 раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист

а) не с него начал и не на нем закончил?

б) с него начал, но не на нем закончил?

в) с него начал и на нем закончил?

10. На рисунке изображен парк, разделенный на несколько частей заборами. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перелезть через каждый забор ровно 1 раз?



11. Первенство класса

В первенстве класса по настольному теннису 6 участников: Артем, Булат, Влад Батыршин, Глеб, Дмитрий и Ермошин Влад. Первенство проводится по круговой системе- каждый из участников играет с каждым из остальных один раз.

К настоящему моменту некоторые игры уже проведены: Артем сыграл с Булатом, Глебом и Ермошиным; Булат, как уже говорилось, с Артемом и еще с Глебом; Влад- с Глебом, Дмитрием и Ермошиным; Глеб- с Артемом и Булатом; Дмитрий- с Владом и Ермошин- с Артемом и Владом.

Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько еще осталось?

Ответ: 8 игр.

5. ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача № 1 Три друга после школы едут домой на различном транспорте: автобусе, троллейбусе, трамвае. Однажды после уроков Алеша пошел проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку». Кто на чем ездит домой?

Задача №2: Любители музыки:

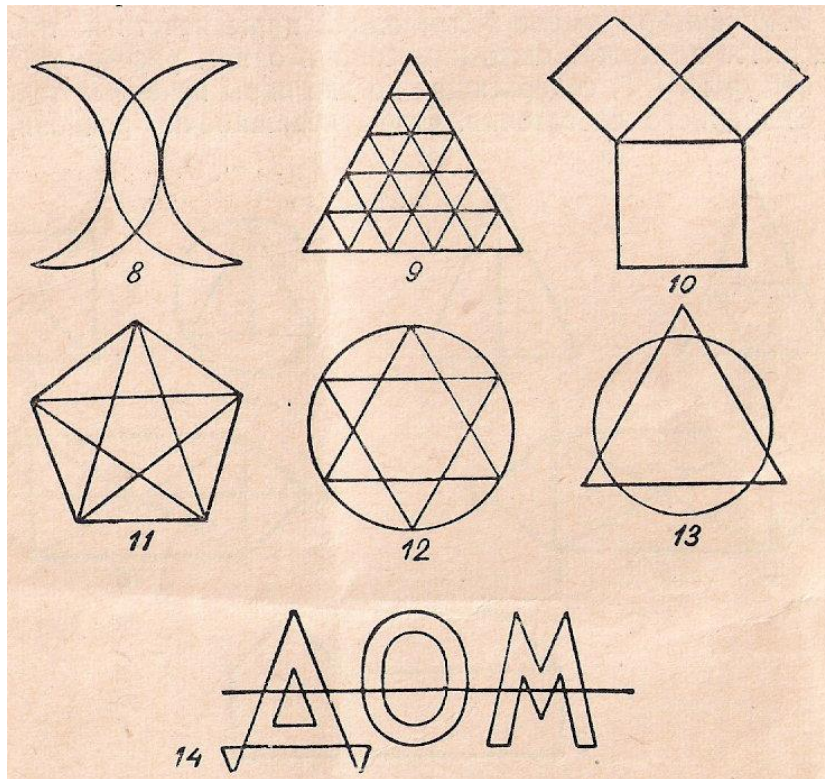
В клубе «Отдых» познакомились 3 любителя клубной музыки видов техно, хаус, рейв. Один говорит: «Вы какую музыку больше любите? Я техно люблю!». Другой ответил, что любит хаус, а третий сказал, что не любит ни техно, ни хаус, но зато обожает рейв. Интересно то, что все они были в банданах и рубашках черного, белого и желтого цветов, но цвет банданы и рубашки совпадал только у любителя техно. А у любителя хаус ни рубашка, ни бандана не были белыми. А любитель рейв был в желтой рубашке. Определите цвет рубашек и бандан каждого из любителей клубной музыки.

Задача № 3 Мебельный магазин имеет 3 образца стульев с бордовой, серой и зеленой обивкой и 2 образца столов – круглые и квадратные. Маша с папой пришли в магазин, им нужно купить стол со стульями. Сколько вариантов выбора у них есть?

Задача № 4 У Юры 2 пирамидки, 3 мяча и 2 конструктора. Он хочет выбрать из этих игрушек одну пирамидку, один мяч и один конструктор. Сколькими способами он это может сделать?

Задача №5

Предлагаю начертить одним росчерком следующие фигуры.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Не приходится сомневаться в полезности ознакомления учащихся, с основными понятиями теории графов. Решение многих математических задач упрощается, если удастся использовать графы. Представление данных в виде графа придает им наглядность. Многие доказательства также упрощаются, приобретают убедительность, если воспользоваться графами. В особенности это относится к таким областям математики, как математическая логика, комбинаторика.

Таким образом, изучение этой темы имеет большое общеобразовательное, общекультурное и общематематическое значение. В повседневной жизни все большее применение находят графические иллюстрации, геометрические представления и другие приемы и методы наглядности. С этой целью изучения элементов теории графов полезно ввести в начальном и среднем звене школы, хотя бы во внеклассной работе, так как в программу по математике эта тема не включена.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы. Модели вычислений. Алгоритмы.– Н.Новгород, ННГУ, 2005. 307 с.
2. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений.– М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 320 с.
3. Берж К. Теория графов и ее применение.– М.: ИЛ, 1962. 319 с.
4. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов.– М.: Наука, 1990. 383 с.
5. Зыков А.А. Основы теории графов.– М.: Вузовская книга, 2004. 664 с.
6. Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение.– СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.
7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход . – М.: Мир, 1978. 432 с.
8. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ.– М.: Вильямс, 2005. 1296 с.
9. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. 213 с.
10. Оре О. Теория графов.– М.: Наука, 1980. 336 с.
11. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на C++. Часть 5. Алгоритмы на графах. – СПб.: DiaSoftЮП, 2002. 496 с.
12. Харари Ф. Теория графов.– М.: Мир, 1973. 300 с.
13. Альхова З.Н., Макеева А.В. «Внеклассная работа по математике».
14. Журнал «Математика в школе». Приложение «Первое сентября» № 13 2008г.
15. Перельман Я.И. «Занимательные задачи и опыты».- Москва: Просвещение, 2000 г.
16. http://phys-mathschool.blogspot.com/p/5-6_1.html
17. https://упок.ppf/library/grafi_vokrug_nas_185222.html

Учебное текстовое электронное издание

**Акманова Зоя Сергеевна
Квасова Нина Александровна**

**МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПУТЬ К УСПЕХУ»:
НАПРАВЛЕНИЕ «МАТЕМАТИКА»,
ПОДТЕМА «ТЕОРИЯ ГРАФОВ-ШКОЛЬНИКУ»**

Учебно-методическое пособие

2,03 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2021 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Факультет дополнительного образования детей и взрослых
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru