Олимпиада "Путь к Успеху"
10 класс.

Итого: 24

1. Дано:
нач. с. — v_0
макс. высот — h.
когда м1 — h, на h=0

H — ?

Решение:

1) Максимальная высота подъема:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}. \quad \frac{v_0^2}{g} = 2h.$$

2) Время подъема до макс. точки:

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(в момент времени t_1 мячик находится на макс. высоте h и v = 0)

y, 0

направим ось Oy вертикально вверх, начало отсчета совместим с точкой броска. Время t=0 соответствует броску мяча 1. =>

Первый мячик: (t=0)

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad t \geq 0.$$

Второй мячик $(t = t_1)$

$$y_2(t) = v_0 \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2} \quad t \geq t_1.$$

Встреча мячиков произойдет в некоторый момент времени, когда координаты мячиков сравняются.

$$y(t) = y_2(t). \Rightarrow$$

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0(t - t_1) - \frac{g(t-t_1)^2}{2}$$

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t - v_0 t_1 - \frac{g}{2}(t^2 - 2tt_1 + t_1^2). \quad | \cdot (-2)$$

$$gt^2 = 2v_0 t_1 + gt^2 - 2gtt_1 + gt_1^2. \quad | : gt^2$$

$$0 = 2v_0 t_1 - 2gtt_1 + gt_1^2$$

т.к. $t_1 > 0$ можем разделить на t_1

$$t = \frac{2v_0 + gt_1}{2g} = \frac{v_0}{g} + \frac{t_1}{2}. \quad \text{т.к. } \frac{v_0}{g} = t_1 \Rightarrow$$

$$t = t_1 + \frac{t_1}{2} = \frac{3}{2} t_1$$

$$H = y_1\left(\frac{3}{2} t_1\right) = v_0 \cdot \frac{3}{2} t_1 - \frac{g}{2}\left(\frac{3}{2} t_1\right)^2 = \frac{3}{2} v_0 t_1 - \frac{9}{8} g t_1^2$$

т.к. $t_1 = \frac{v_0}{g}$.

$$H = \frac{3}{2} v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{9}{8} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{3v_0^2}{2g} - \frac{9v_0^2}{8g} = \frac{12v_0^2 - 9v_0^2}{8g} = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

$$H = \frac{3 \cdot 2gh}{8g} = \frac{3}{4} h.$$

5

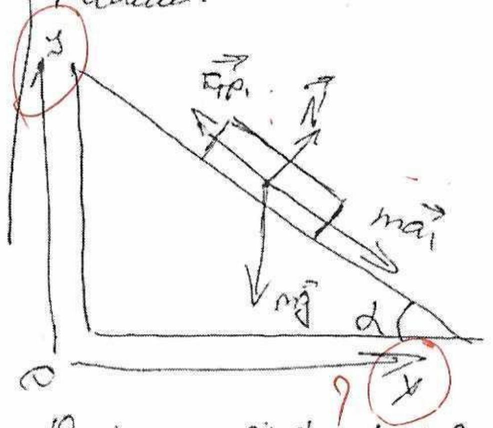
Ответ: мячики столкнутся на $\frac{3}{4}h$ от точки броска

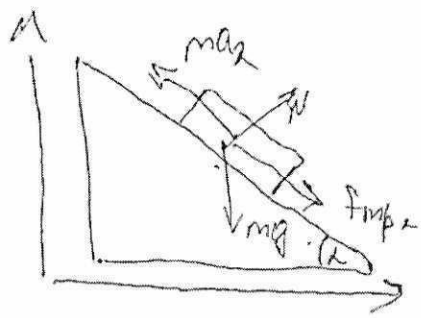
Время движения первого мячика до встречи составляет $\frac{3}{2} t_1$, т.е. он успевает подняться до высоты h и затем опуститься на $\frac{1}{4}h$ от макс. высоты. Второй мячик в этот момент находится на подъеме и достигает той же высоты => столкновение будет на высоте $\frac{3}{4}h$ от макс. первого мячика.

№2. Дано:
угол наклона – α
коэфф. трения – μ
$a(t) = kt$

$\frac{t_{вниз}}{t_{вверх}}$ – ?

Решение:





$Ox: mg\ \sin\alpha$? ; $ma\ \cos\alpha$

$Oy: mg\ \cos\alpha$; ? $ma\ \sin\alpha$ (−1)

Сумма проекций сил на ось Y равна 0, т.к. брусок не отрывается от клина:

$N = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha$. ?

Макс. сила трения:

$F_{тр.макс} = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - ma\sin\alpha)$.

Брусок начнет скользить, когда результирующая сила вдоль оси x превысит $F_{тр.макс}$.

Рассмотрим 2 случая.

~~1) Брусок скользит вниз по клину~~
~~Рез. сила: $F = mg\sin\alpha + ma\cos\alpha$~~
~~Условие скольжения: $mg\sin\alpha + ma\cos\alpha > \mu(mg\cos\alpha - ma\sin\alpha)$ =>~~
~~$a(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) > \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha$ =>~~
~~$a_\downarrow = \frac{(\mu g\cos\alpha - g\sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$~~
~~2. Брусок вверх~~

1) Скольжение вниз

$$a_{вниз} = g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

2) Скольжение вверх:

$$a_{вверх} = -g\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

Время начала скольжения:

$$t_{вниз} = \frac{a_{вниз}}{k},\quad t_{вверх} = \frac{|a_{вверх}|}{k}.$$

(т.к. линейный закон изменения ускорения $a(t) = kt$ (скольжение вниз) $a(t) = -kt$ (вверх).

$$\Rightarrow \frac{t_{вниз}}{t_{вверх}} = \frac{a_{вниз}}{a_{вверх}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}{\dfrac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}} = \frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \quad \boxed{| : \cos^2\alpha}$$

$$\frac{t_{вниз}}{t_{вверх}} = \frac{(tg\alpha - \mu)(1 - \mu tg\alpha)}{(1 + \mu tg\alpha)(\mu + tg\alpha)} \Rightarrow \frac{(\mu - tg\alpha)(1 - \mu tg\alpha)}{(1 + \mu tg\alpha)(\mu + tg\alpha)}.$$

Ответ: время различается в $\frac{(\mu - tg\alpha)(1 - \mu tg\alpha)}{(1 + \mu tg\alpha)(\mu + tg\alpha)}$ раз (с учетом знака, если $\mu > tg\alpha$, то выражение положительно, т.к. оба множителя в числителе меняют знак).

4

№ 3. Дано:
$M = 400г = 0,4$ кг.
$m = 100г = 0,1$ кг.
$L = 100мм = 0,1$ м
$Q = 1$ Дж
$F_{сопр} = 250 Н$
удар неупруг.

$N - ?$

Решение:

1) Перед ударом молоток движется со скоростью v, гвоздь неподвижен. по ЗСИ:

$$Mv = (M+m)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{M}{M+m} v$$

2) Кинетическая энергия системы до удара:

$$E_0 = \frac{Mv^2}{2}.$$

После удара:

$$E_1 = \frac{(M+m)v_1^2}{2} = \frac{(M+m)}{2}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 = \frac{M^2v^2}{2(M+M)}$$

?

По ЗСЭ изменение кин. э.:

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{Mv^2}{2}\left(1 - \frac{M}{M+m}\right) = \frac{Mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M+m}$$

$\Delta E = Q$; $Q = 1$ Дж: $\Rightarrow$

$$\frac{Mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M+m} = Q. \Rightarrow$$

$$\frac{Mv^2}{2} = Q \cdot \frac{M+m}{m} = 1 \cdot \frac{0,4+0,1}{0,1} = 5 \text{ Дж}.$$

таким образом, кинетическая энергия системы после удара:

$$E_1 = E_0 - Q = 5 - 1 = 4 \text{ Дж}.$$

3. После удара гвоздь с молотком движутся под действием постоянной $F_{сопр}$. Работа силы сопротивления равна изменению кинетической энергии системы (конечная скорость становится нулевой):

$A = \cancel{E_0} = E_1 - 0 = E_1$, где s - путь гвоздя за один удар. $\Rightarrow$
$F \cdot s$

$$s = \frac{E_1}{F} = \frac{4}{250} = 0,016 \text{ м} = 16 \text{ мм}.$$

4. Полная длина гвоздя $L = 100$ мм. Чтобы полностью забить гвоздь, необходимо, чтобы суммарный путь всех ударов был не менее L. Тогда число ударов:

$$N = \frac{L}{s} = \frac{100}{16} = 6,25 \text{ (окр. до целых)} = 7 \text{ ударов}.$$

Ответ: 7.

5

№4. Дано:

$P = 50$ Вт

$t_1 = 0^\circ C$

$t_2 = 2^\circ C$

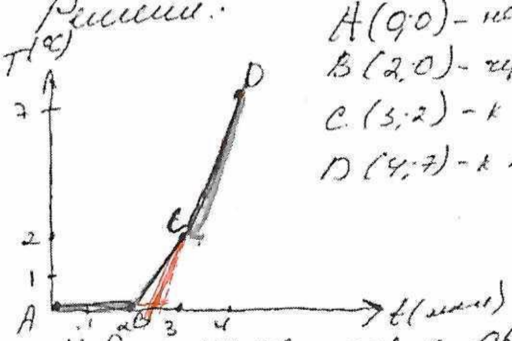
$t_3 = 7^\circ C$

$\lambda_л = 340 \frac{кДж}{кг} = 3{,}4 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг}$

$c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C}$

$\frac{m_б}{m_л}$ - ?

Решение:



A(0;0) – начало нагрева, тем-ра 0°C.

B(2;0) – через 2 минуты не изменилась

C(3;2) – к концу 3 минуты тем-ра = 2°C.

D(4;7) – к концу 4 минуты тем-ра = 7°C.

1) В течение первых двух минут температура не менялась => идет плавление льда

2) К концу третьей минуты t стала 2°C => к этому моменту лед уже полностью растаял и начался нагрев воды.

3) За 4-ую минуту t поднялась с 2°C – 7°C. нагрев за 1 мин на 5°C

$M = m_в + m_л$ – > общ. масса после полного таяния

---

1. За 4ую минуту $\Delta T_4 = 5^\circ C$.

$$Q_4 = P \cdot \Delta t_4 = 50 \cdot 60 = 3000 \text{ Дж}.$$

$$Q_4 = cM\Delta T_4 \Rightarrow$$

$$M = \frac{Q_4}{c\Delta T_4} = \frac{3000}{4200 \cdot 5} = \frac{3000}{21000} = \frac{1}{7} \text{ кг} \approx 0{,}1428 \text{ кг}.$$

2. За первые две минуты:

$$Q_1 = P \cdot t_1 = 50 \cdot 120 = 6000 \text{ Дж}.$$

$$\Delta m_1 = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{6000}{3{,}4 \cdot 10^5} = \frac{6}{340} = \frac{3}{170} \text{ кг}.$$

Остаток льда после 2х минут:

$$m_л - \frac{3}{170}.$$

Далее продолжается плавление оставшегося льда. Пусть с момента $t = 120c$ до момента полного таяния прошло время τ.

$$Q_{пл.} = P\tau = \lambda\left(m_л - \frac{3}{170}\right). \leftarrow (1)$$

После полного таяния начинается нагревание воды. От момента $t_{пл} = 120 + \tau$ до конца 3й минуты ($t = 180c$) проходит время:

$$\Delta t = 180 - (120 + \tau) = 60 - \tau$$

(За это время вода нагрелась на 2°C) =>

$$P \cdot (60 - \tau) = cM \cdot 2. \Rightarrow \quad (2).$$

$$50 \cdot (60 - \tau) = 4200 \cdot \frac{1}{7} \cdot 2 = 4200 \cdot \frac{2}{7} = 1200$$

$$60 - \tau = \frac{1200}{50} = 24 \Rightarrow \tau = 36 \text{ c}.$$

3. Из (1)

$50 \cdot 36 = \lambda(m_л - \frac{3}{170})$

$1800 = 3{,}4 \cdot 10^5 (m_л - \frac{3}{170})$

$m_л - \frac{3}{170} = \frac{1800}{3{,}4 \cdot 10^5} = \frac{18}{3400} = \frac{9}{1700}$ кг.

$m_л = \frac{3}{170} + \frac{9}{1700} = \frac{30+9}{1700} = \frac{39}{1700}$ кг.

4. $m_в = M - m_л = \frac{1}{7} - \frac{39}{1700}$.

$\frac{1}{7} = \frac{1700}{11900}$; $\frac{39}{1700} = \frac{39 \cdot 7}{11900} = \frac{273}{11900}$.

$m_в = \frac{1700 - 273}{11900} = \frac{1427}{11900}$ кг. =>

$\frac{m_в}{m_л} = \frac{1427}{11900} : \frac{39}{1700} = \frac{1427}{11900} \cdot \frac{1700}{39} = \frac{1427}{7 \cdot 39} = \frac{1427}{273}$.

$\frac{1427}{273} \approx 5{,}227$.

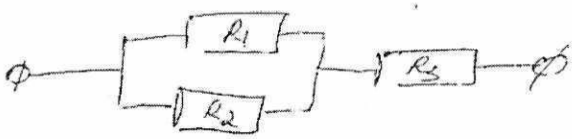
5

Ответ: $\frac{1427}{273}$ или 5,23.

№5. Дано:
$R_1 = 3$ Ом
$R_2 = 6$ Ом
$R_3 = 4$ Ом
$t_1 = 15t$.
$t_3 = t$.

$\frac{Q_1}{Q_3}$ - ?

Решение:



1. Резисторы R_1 и R_2 соединены параллельно =>

$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2$ Ом. =>

тогда полное сопротивление цепи

$R = R_{12} + R_3 = 2 + 4 = 6$ Ом.

2. Пусть напряжение источника $= U$. =>

$I = \frac{U}{R} = \frac{6}{R}$?

3. $U_{12} = I \cdot R_{12} = \frac{U}{6} \cdot 2 = \frac{U}{3}$

4. $I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{\frac{U}{3}}{3} = \frac{U}{9}$.

5. По закону Джоуля - Ленца:

$Q_1 = I_1^2 R_1 t_1$

$Q_1 = \left(\frac{U}{9}\right)^2 \cdot 3 \cdot 15t = \frac{U^2}{81} \cdot 45t = \frac{5}{9} U^2 t$.

6. Кол. во теплоты на R_3.

$$I_3 = I = \frac{U}{6}.$$

$$Q_3 = I_3^2 R_3 t = \left(\frac{U}{6}\right)^2 \cdot 4 \cdot t = \frac{U^2}{36} \cdot 4t = \frac{1}{9} U^2 t.$$

7. $$\frac{Q_1}{Q_3} = \frac{\frac{5}{9} U^2 t}{\frac{1}{9} U^2 t} = 5$$

Ответ: $\frac{Q_1}{Q_3} = 5.$

5