

11 класс

1. (2 балла) Докажите, что число вида

$$(10^n + 10^{n-1} + \dots + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$$

есть точный квадрат.

2. (2 балла) Решите уравнение

$$\left[\frac{x+3}{x} \right] = \frac{x-1}{2},$$

где $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3 + 2026x^2 - 2025x - 1 = 0$.

Найти

$$\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_3 x_2}{x_1} + \frac{x_1 x_3}{x_2}.$$

4. (4 балла) Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Вычислите:

$$671 \cdot \left(\frac{1}{a_{1000} \cdot a_{1001}} + \frac{1}{a_{1001} \cdot a_{1002}} + \dots + \frac{1}{a_{2025} \cdot a_{2026}} \right)$$

если известно, что $a_{2000} = 2000$.

5. (4 балла) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(3 + |\sin x|) \geq 2^{|x|} - 2, \\ \log_{(x+2025)} \left(\frac{x-2025}{2x-2026} \right)^2 < 0. \end{cases}$$

6. (5 баллов) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ имеет решения.

7. (5 баллов) В параллелограмме $MNKP$ высота NH равна 8 см, сторона NK равна 12 см. На отрезках NK и NH отмечены точки A и B соответственно так, что $NA:AK=2:1$, $NB:BH=1:3$. Определите градусную меру угла BPA .

8. (5 баллов) Определите объём усечённого конуса, если образующая его L образует с большим основанием угол α и диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны.