М6

11 класс

1. (2 балла) Докажите, что число вида

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$$

есть точный квадрат.

2. (2 балла) Решите уравнение

$$\left[\frac{x+3}{x}\right] = \frac{x-1}{2},$$

где $[x]$ – целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3 + 2026x^2 - 2025x - 1 = 0$.

Найти

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_3x_2}{x_1} + \frac{x_1x_3}{x_2}.$$

4. (4 балла) Дана арифметическая прогрессия (a_n). Вычислите:

$$671 \cdot \left(\frac{1}{a_{1000} \cdot a_{1001}} + \frac{1}{a_{1001} \cdot a_{1002}} + \cdots + \frac{1}{a_{2025} \cdot a_{2026}}\right)$$

если известно, что $a_{2000} = 2000$.

5. (4 балла) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} log_{\frac{1}{3}}(3 + |sinx|) \geq 2^{|x|} - 2, \\ log_{(x+2025)}\left(\frac{x-2025}{2x-2026}\right)^2 < 0. \end{cases}$$

6. (5 баллов) При каких значениях параметра *a* уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + sinx}} = sinx$ имеет решения.

7. (5 баллов) В параллелограмме MNKP высота NH равна 8 см, сторона NK равна 12 см. На отрезках NK и NH отмечены точки A и B соответственно так, что NA:AK=2:1, NB:BH=1:3. Определите градусную меру угла BPA.

8. (5 баллов) Определите объём усечённого конуса, если образующая его L образует с большим основанием угол α и диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны.

1

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
2	2	3	3	0	5	0	4	19

Чистовик:

М6

№1.

$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$

$10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$

$t = 10^{n+1}$

$\frac{t-1}{9} \cdot (t+5) + 1 = \frac{(t-1)(t+5)}{9} + 1 = \frac{t^2 + 4t - 5 + 9}{9} = \frac{t^2 + 4t + 4}{9}$

$t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2 \Rightarrow \frac{(t+2)^2}{9} = \left(\frac{t+2}{3}\right)^2$

2б

Исходное выражение - квадрат целого числа - доказано

Ответ. доказано

№2

$\left[\frac{x+3}{x}\right] = \frac{x-1}{2}$, где $[x]$ - целая часть числа x, то есть – число, не превосходящее x.

$\frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$

Пусть $k = [1 + \frac{3}{x}] = k = \frac{x-1}{2}$

$k \le 1 + \frac{3}{x} < k + 1$. Подставляю $k = \frac{x-1}{2}$: $\frac{x-1}{2} \le 1 + \frac{3}{x} < \frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x+1}{2}$

$\frac{x-1}{2} \le 1 + \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{2} - 1 \le \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{x-3}{2} \le \frac{3}{x}$

При $x > 0$ на $2x$: $x(x-3) \le 6 \Rightarrow x^2 - 3x - 6 \le 0$

Корни $\frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$

$0 < x \le \frac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4{,}38$

$1 + \frac{3}{x} < \frac{x+1}{2} \Rightarrow \frac{3}{x} < \frac{x+1}{2} - 1 = \frac{x-1}{2}$

При $x > 0$: $6 < x(x-1) \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) > 0$

Для $x > 0$, $x > 3$. Пересечение: $3 < x \le \frac{3+\sqrt{33}}{2}$, при $x \in (3;\ 4.38]$ $k = \frac{x-1}{2} \in (1;\ 1{,}685]$, целое $k = 1$.

$\frac{x-1}{2} = 1 \Rightarrow x = 3$

При $x = -1$: левая $[\frac{2}{-1}] = -2$, правая $\frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow$ нет

При $x = -2$: левая $[\frac{1}{-2}] = -1$, правая $\frac{-3}{2} = -1{,}5 \Rightarrow$ нет

При $x = -5$: левая $[\frac{-2}{-5}] = 0$, правая $\frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow$ нет

$\varnothing \Rightarrow$ нет решения

Ответ $\varnothing$

2б

№3

$\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_3 x_2}{x_1} + \frac{x_1 x_3}{x_2}$

$x_1 + x_2 + x_3 = -2026$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -2025$, $x_1 x_2 x_3 = 1$

$S = \frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{x_3 x_1}{x_2}$, $\frac{x_1 x_2}{x_3} = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_3^2} = \frac{1}{x_3^2}$

$\frac{x_2 x_3}{x_1} = \frac{1}{x_1^2}$, $\frac{x_3 x_1}{x_2} = \frac{1}{x_2^2}$, $S = \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

M6

$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{(x_1x_2)^2+(x_2x_3)^2+(x_3x_1)^2}{(x_1x_2x_3)^2}$

$(x_1x_2)^2+(x_2x_3)^2+(x_3x_1)^2=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=(-2025)^2-2\cdot 1\cdot(-2026)=2025^2+4052$

$2025^2=(2000+25)^2=(45^2)^2=45^4=4000000+100000+625=4100625$

$4100625+4052=4104677$

Ответ: 4104677

35

№4

$671\cdot\left(\frac{1}{a_{1000}\cdot a_{1001}}+\frac{1}{a_{1001}\cdot a_{1002}}+\dots+\frac{1}{a_{2025}\cdot a_{2026}}\right)$, $a_{2000}=2000$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_{2000}=a_1+1999d=2000$

$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$\sum_{k=1000}^{2025}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{1000}}-\frac{1}{a_{2026}}\right)$

$a_{1000}=a_{2000}-1000d=2000-1000d$

$a_{2026}=a_{2000}+26d=2000+26d$

$a_{1000}=1,\ d=1{,}999$

Ответ: $\frac{344223}{1013000}$

$\frac{1}{a_{1000}}-\frac{1}{a_{2026}}=\frac{a_{2026}-a_{1000}}{a_{1000}\cdot a_{2026}}=$

$=\frac{(2000+26d)-(2000-1000d)}{a_{1000}\cdot a_{2026}}=\frac{1026d}{a_{1000}\cdot a_{2026}}$

$671\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{1026d}{a_{1000}\cdot a_{2026}}=\frac{671\cdot 1026}{a_{1000}\cdot a_{2026}}\Rightarrow\left/\cdot\frac{671}{d}\right.$

$\Rightarrow 1026=1026,\ 671=671$

$671\cdot 1026$

$(2000-1000d)(2000+26d)$

$671\cdot\frac{1026}{1000\cdot 2026}=\frac{344223}{1013000}$

36

№5

$\cancel{\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|)\geq 2^{|x|}-2,\\ \log_{(x+2025)}\left(\frac{x-2025}{2x-2026}\right)^2<0\end{cases}}$

№6 $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}$

ДЗ:

1) $a+t\geq 0$

2) $a+\sqrt{a+t}\geq 0$

3) $t\geq 0$

из $t\geq 0$ и $t\leq 1$, $t\in[0,1]$

$a+t=(t^2-a)^2=t^4-2at^2+a^2$

$0=t^4-2at^2+a^2-a-t$

$D=(2t^2+1)^2-4(t^4-t)=4t^4+4t^2+1-4t^4+4t$

$4t^2+4t+1=(2t+1)^2$, $a=\frac{(2t^2+1)\pm(2t+1)}{2}$

$a_1=\frac{2t^2+1+2t+1}{2}=\frac{2t^2+2t+2}{2}=t^2+t+1$

$a_2=\frac{2t^2+1-2t-1}{2}=\frac{2t^2-2t}{2}=t^2-t$

$a=t^2-t=t(t-1)$, $t\in[0,1]\Rightarrow$

$\Rightarrow$ парабола с вершиной в $t=0{,}5$

$a_{min}=-0{,}25$, $t=0\Rightarrow a=0$

$t=1\Rightarrow a=0$

Ответ: $a\in\left[-\frac{1}{4},0\right]$.

56

2

Чистовик.

M6

№8

$$\begin{cases} R-r = d\cos a \\ R+r = d\sin a \end{cases}$$

$R = \frac{d}{2}(\cos a+\sin a)$, $r = \frac{d}{2}(\sin a-\cos a)$

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$

$h = d\sin a$, $R = \frac{d}{2}(\cos a+\sin a)$

$Rr = \frac{d^2}{4}(\sin^2 a-\cos^2 a) = \frac{d^2}{4}(-\cos 2a) = -\frac{d^2}{4}\cos 2a$, тогда

$R^2+Rr+r^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{d^2}{4}\cos 2a = \frac{d^2}{4}(2-\cos 2a)$

$V = \frac{\pi}{3}\cdot d\sin a\cdot\frac{d^2}{4}(2-\cos 2a) = \frac{\pi d^3}{12}\sin a(2-\cos 2a$

Ответ $V = \frac{\pi d^3}{12}\sin a(\underline{3-2\cos 2a})$.

45